UNIWERSYTET GDAŃSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I INFORMATYKI

Paweł Wieczyński

Kierunek studiów: **Matematyka**
Specjaność: **Matematyka finansowa**
Numer albumu: **238078**

Wycena opcji europejskich
za pomocą modelu GARCH

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. UG dr hab. Henryk Leszczyński

Gdańsk 2020

Spis treści

Wstęp

Uogólniony model autoregresji z warunkową heteroskedastycznością (GARCH) pojawił się po raz pierwszy w pracy Borresleva (1986). Jest to ekonometryczny model szeregu czasowego, którego wartości w chwili t zależą od wartości przyjmowanych przez ów szereg czasowy w chwilach $s < t$ (autoregresja) oraz od wariancji tego szeregu czasowego w chwilach $s < t$ (warunkowa heteroskedastyczność).

Jak podaje Fiszeder [3], główne zastosowania modeli klasy GARCH to opis oraz prognozowanie zmienności, która rozumiana jest jako miara ryzyka związana ze stopami zwrotów instrumentów finansowych. Wariancja warunkowa prognozowana za pomocą modeli klasy GARCH może być traktowana jako miara ryzyka. Dzięki wykorzystaniu takich obiektów jak warunkowa wartość oczekiwana oraz w szczególności wariancja warunkowa, efektywniej wykorzystuje się informacje o danych stopniowo napływających z rynku.

Modele klasy GARCH są obecnie najczęściej stosowanymi modelami zmienności instrumentów finansowych z następujących powodów: pozwalają opisać większość empirycznych własności finansowych szeregów czasowych, takich jak tworzenie się skupisk zmienności, zjawisko powrotu do średniej w długim okresie czy większa kurtoleptyczność rozkładów niż w przypadku rozkładu normalnego. Ponadto łatwo rozszerza się te modele w celu uchwycenia dodatkowych własności szeregów czasowych oraz modele te są łatwe w estymacji.

Jak podaje Venter [9], w arbitrażowej wycenie instrumentów pochodnych, w szczególności w modelu Blacka-Scholesa, przyjmuje się, że cena intrumentów pochodnych jest niezależna od preferencji względem ryzyka oraz od funkcji użyteczności inwestorów. Daje nam to jednoznaczną cenę instrumentów pochodnych, jednak kosztem upraszczających założeń, które stoją w sprzeczności z danymi empirycznymi. Między innymi w klasycznym modelu Blacka-Scholesa zakłada się, że proces cen akcji dany jest geometrycznym procesem Wienera, co jest równoznaczne z tym, że wariancja zwrotów z cen akcji nie zmienia się w czasie. W rzeczywistości jednak, zmienność na rynkach finansowych ma charakter stochastyczny. W tej pracy porzucimy jedno z tych klasycznych założeń, mianowicie założenie stałej zmienności zwrotów z cen akcji. Modele rynkowe dopuszczające zmienność stochatyczną tracą jednak ważną bardzo własność jaką jest zupełność rynku. Wynika to z faktu, że brak jest na rynku instrumentów pozwalających zreplikować portfel o dużej zmienności. Implikuje to brak istnienia jednoznacznej miary martyngałowej, co w dalszje kolejności powoduje, że cena isntrumentów pochodnych, a w szczególności opcji, zależy od preferencji wzgędem ryzyka oraz od funkcji użyteczności inwestorów.

Duan [2] definiuje wycenę przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka (LRNVR), rozszerzając na rynki niezupełne klasyczną wycenę arbitrażową. W swojej pracy Duan opracował podejście do problemu wyceny oraz zabezpieczenia (*delta hedging*) opcji europejskich, w którym proces zwrotów z aktywa bazowego jest procesem klasy GARCH. Podejście to odróżnia się od klasycznego w kilku istotnych aspektach. Po pierwsze cena opcji z wykorzystaniem modelu GARCH jest zależna premii za ryzyko ściśle związanej z danym instrumentem bazowym, podczas gdy podejście klasyczne jest niezależne od preferencji uczestników rynku. Po drugie proces klasy GARCH nie jest procesem Markowa, podczas w podejściu klasycznym przyjmuje się, że proces cen aktywa bazowego podlega procesowi dyfuzji, który jest procesem Markova. Po trzecie model wyceny opcji GARCH pozwala wyjaśnić niektóre obciążenia modelu Blacka-Scholesa, które stoją w sprzeczności z danymi empirycznymi. Co więcej, model Blacka-Scholesa można uznać za szczególny przypadek modelu GARCH, w którym proces zwrotów z cen instrumentu bazowego cechuje się homoskedastycznością.

Parametry procesu GARCH estymowane są metodą największej wiarygodności na podstawie empirycznych szeregów czasowych z rynków finansowych. Ponieważ podejście zaproponowane przez Duana nie ma rozwiązania analitycznego, cena intrumentu bazowego w momencie wykonania opcji jest progonozowana metodami Monte-Carlo.

W pierwszym rozdziale, w oparciu o [4], [7] oraz [9] podamy podstawowe definicje, fakty oraz twierdzenia z rachunku prawdopodobieństwa oraz teorii procesów stochastycznych, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. Ponadto, bazując na [5], [6] oraz [9] omówimy podstawowe zagadnienia dotyczące rynków finansowych oraz wyceny instrumentów pochodnych.

W drugim rozdziale, bazując na [2] oraz [9], zdefiniujemy proces GARCH oraz miarę LRNVR. Pokażemy, że miara LRNVR jest równoważna rynkowej mierze probabilistycznej oraz wykażemy zależności między obiema miarami w kategoriach warunkowej wartości oczekiwanej. Ponadto omówimy zagadnienie maksymalizacji użyteczności przez racjonalnego inwestora, zdefiniujemy stałą absolutną oraz relatywną awersję do ryzyka oraz udowodnimy twierdzenie, które podaje warunki jakie muszą spełniać funkcje użyteczności oraz konsumpcji, aby równoważna miara spełaniała definicję miary LRNVR. Wyprowadzimy również wzór na przekształcony proces zwrotów z cen po zastosowaniu miary LRNVR. Następnie wyprowadzimy z niego wzór na cenę instrumentu bazowego w chwili wykonania opcji, a także wzory na cenę europejskich opcji kupna oraz sprzedaży.

W rodziale trzecim, w oparciu o [4] oraz [7], omówimy proces GARCH(1,1), który można przedstawić jako stochastyczne równanie rekurencyjne postaci $Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t$. Podamy warunki, jakie muszą być spełnione, aby istaniało jednoznaczne stacjonarne rozwiązanie tego równania oraz podamy postać tego rozwiązania. Pozwoli nam to wykazać stacjonarność procesu GARCH(1,1) przy spełnieniu odpowiednich warunków przez współczynniki modelu. Natępnie, bazując na [2] oraz [9], udowodnimy kilka własności procesu GARCH(1,1). W oparciu o [8] przedstawimy metodę największej wiarygodności do oszacowania parametrów rozkładu oraz metody Monte-Carlo do prognozowania ceny instrumentu bazowego w momencie wykonania opcji. Przedstawimy również wyniki empiryczne, dokonując wyceny europejskich opcji kupna na akcje spółki *Amazon.com, Inc.* o różnych terminach wykonania oraz porównamy otrzymane wyniki z cenami otrzymanymi wzorem Blacka-Scholesa.

Rozdział 1

Procesy stochastyczne i intrumenty finansowe

W rozdziale tym podamy podstawowe definicje i twierdzenia oraz wprowadzimy oznaczenia wykorzystywane w dalszej części pracy.

W sekcji 1.1, w oparciu o [9], wprowadzimy obiekty probabilistyczne występujące w pracy, takie jak warunkowa wartość oczekiwana, wariancja warunkowa oraz pochodna Radona-Nikodyma. Zagdanienia dotyczące stacjonarności procesów stochastycznych omówimy w oparciu o [4], [7].

W sekcji 1.2 wprowadzimy podstawowe pojęcia wykorzystywane w analizie instrumentów finansowych, takie jak równoważna miara martyngałowa, arbitraż oraz zupełność rynku. Sformułujemy pierwsze twierdzenie matematyki finansowej (dotyczące zjawiska arbitrażu) oraz drugie podstawowe twierdzenia matematyki finansowej (dotyczące zupełności rynku). Bardziej szczegółowe omówienie tych zagadnień można znaleźć w [5], [6], [9].

1.1 Procesy stochastyczne

Niech $\mathcal{T}$ oznacza pewien niepusty zbiór indeksów. Załóżmy, że dana jest przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest niepustym zbiorem zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą zdarzeń losowych, $\mathbb{P}$ jest rynkową miarą probabilistyczną. Filtracją nazywamy niemalejącą rodzinę σ-algebr, gdzie $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ dla $t \in \mathcal{T}$. Zakładamy, że filtracja spełnia warunki zwyczajne: każda σ-algebra $\mathcal{F}_t$ zawiera w sobie wszystkie zbiory miary zero oraz filtracja jest prawostronnie ciągła, tzn.

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{t<s} \mathcal{F}_s \quad \text{dla} \quad t \in \mathcal{T}.$$

$\mathcal{F}_t$ odzwierciedla informacje o rynku w chwili $t \in \mathcal{T}$. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ lub $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią $\mu \in \mathbb{R}$ oraz wariancją $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$. Wówczas piszemy $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Procesem stochastycznym nazywamy rodzinę $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Proces stochastyczny $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$, jeśli zmienna losowa X_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna dla $t \in \mathcal{T}$. Proces stochastyczny $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest prognozowalny względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$, jeśli zmienna losowa X_t jest $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna dla $t \in \mathcal{T}$. Proces $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ nazywamy martyngałem, gdy $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ dla $t \in \mathcal{T}$ oraz $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = X_{t-1}$.

Definicja 1.1. *Proces stochastyczny $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ nazywamy procesem silnie stacjonarnym, gdy dla każdego ciągu indeksów $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ oraz dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi*

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}, \ldots, X_{t_n+k})$$

tzn. łączny rozkład wektora losowego jest niezmienniczy na przesunięcia.

Definicja 1.2. *Proces stochastyczny $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ nazywamy procesem słabo stacjonarnym, gdy $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ oraz*

$$\mathbb{E}X_t = \mu \quad dla \quad t \in \mathcal{T}$$
$$Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma(k) \quad dla \quad t \in \mathcal{T},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Zgodnie z Definicją 1.2, kowariancja procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ zależy od odległości $|t-s|$ między wskaźnikami $t, s \in \mathcal{T}$ oraz wariancja $\mathrm{Var}X_t$ jest taka sama dla każdego $t \in \mathcal{T}$.

Fakt 1.3. *Jeśli proces stochastyczny $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest procesem silnie stacjonarnym oraz $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$, to $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest również procesem słabo stacjonarnym.*

Niech $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ będzie σ-algebrą, a X będzie całkowalną zmienną losową. Warunkową wartością oczekiwaną X pod warunkiem $\mathcal{G}$ nazywamy zmienną losową $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ taką, że

(i) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna,
(ii) dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P}.$$

Jeśli ponadto zmienna losowa X jest całkowalna z kwadratem, to wariancją warunkową X pod warunkiem $\mathcal{G}$ nazywamy zmienną losową $\mathrm{Var}[X|\mathcal{G}]$ daną wzorem

$$\mathrm{Var}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2 |\mathcal{G}\right].$$

Niech $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ będą miarami określonymi na tej samej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{F})$. Mówimy, że miara $\mathbb{P}$ jest absolutnie ciągła względem miary $\mathbb{Q}$, gdy dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$ takiego, że $\mathbb{Q}(A) = 0$ zachodzi $\mathbb{P}(A) = 0$ i oznaczamy $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. Mówimy, że miary $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ są równoważne, gdy $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ i oznaczamy $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

Aby podkreślić, że warunkową wartość oczekiwaną oraz wariancję warunkową rozpatrujemy względem miary $\mathbb{P}$ będziemy stosować oznaczenia odpowiednio $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}]$ oraz $\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}]$.

Twierdzenie 1.4. *Niech $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Wtedy istnieje zmienna losowa $X \geq 0$ taka, że dla każdego $A \in \mathcal{F}$ zachodzi*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A d\mathbb{Q} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Zmienną losową X w twierdzeniu 1.4 nazywamy pochodną Radona-Nikodyma i oznaczamy $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

1.2 Instrumenty finansowe

Niech $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$ oznacza pewien proces rynkowy, na przykład proces cen pewnego ustalonego instrumentu finansowego, natomiast $(B_t)_{t \in \mathcal{T}}$ niech oznacza pewien ustalony deterministyczny proces rynkowy, na przykład rachunek bankowy o stałym oprocentowaniu. Zakładamy, że $\mathcal{F}_t$ odzwierciedlające informacje o rynku w chwili t jest generowane przez zmienne losowe S_r dla $r \leq t$.

Strategią inwestycyjną H nazywamy proces $(H_t^0, H_t^1)_{t \in \mathcal{T}}$, gdzie H_t^0 oznacza ilość jednostek na rachunku bankowym w chwili $t \in \mathcal{T}$, natomiast H_t^1 oznacza ilość posiadanych w chwili $t \in \mathcal{T}$ jednostek instrumentu finansowego, którego dynamikę cen opisuje proces $(S_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

Proces $(V_t)_{t\in\mathcal{T}}$, gdzie $V_t = H_t^0 B_t + H_t^1 S_t$ opisuje wartość strategii inwestycyjnej w chwili $t \in \mathcal{T}$. Strategię inwestycyjną H nazywamy strategią samofinansującą, gdy

$$V_t = H_{t+1}^0 B_t + H_{t+1}^1 S_t.$$

Klasę strategii samofinansujących oznaczamy $\mathbb{H}$. Oczywiście $\mathbb{H}$ jest przestrzenią liniową. Rynkiem $\mathcal{M}$ nazywamy trójkę $(S, B, \mathbb{H})$, gdzie $S = (S_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest procesem cen pewnego instrumentu finansowego, określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$, zaś $B = (B_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest dyskontującym procesem deterministycznym.

Definicja 1.5. *Miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ nazywamy równoważną miarą martyngałową, gdy spełnia ona następujące warunki*

(i) miara $\mathbb{Q}$ jest równoważna rynkowej mierze $\mathbb{P}$, tzn. $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$,
(ii) zdyskontowany proces cen $(S_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest martyngałem względem miary $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_t B_t^{-1} | F_r\right] = S_r B_r^{-1} \quad dla \quad r \leq t.$$

Wypłatą X w chwili $T \in \mathcal{T}$ nazywamy dowolną zmienną losową określoną Ω. Mówimy, że strategia inwestycyjna H replikuje wypłatę X w chwili $T \in \mathcal{T}$, gdy $V_T = X$. Mówimy, że rynek $\mathcal{M}$ jest zupełny, gdy każda wypłata X jest osiągalna, to znaczy istnieje strategia H_X replikująca wypłatę X.

Europejską opcją kupna nazywamy wypłatę $X \geq 0$, która daje posiadaczowi możliwość zakupu w chwili $T \in \mathcal{T}$ po ustalonej cenie K instrumentu bazowego o wartości S_T. Gdy $S_T > K$, to posiadacz opcji skorzysta z możliwości zakupu, natomiast gdy $S_T \leq K$ wykonanie opcji przez jej posiadacza nie będzie opłacalne. Wypłatą europejskiej opcji kupna jest zatem zmienna losowa

$$X = \max\left(S_T - K, 0\right).$$

Cenę europejskiej opcji kupna w chwili $t \leq T$ oznaczamy C_t. Podobnie, wypłatą europejskiej opcji sprzedaży jest

$$X = \max\left(K - S_T, 0\right).$$

Cenę europejskiej opcji sprzedaży w chwili $t \leq T$ oznaczamy P_t.

W modelach wyceny instrumentów finansowych przyjmuje się, że na rynku nie występuje zjawisko arbitrażu. Jest to sytuacja, w której inwestor nie podejmując ryzyka może osiągnąć pewny zysk w przyszłości.

Definicja 1.6. *Mówimy, że na rynku $\mathcal{M}$ występuje możliwość arbitrażu, gdy istnieje samofinansująca strategia inwestycyjna H taka, że*

(i) $V_0 = 0$,
(ii) $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \; V_t(\omega) \geq 0\}\right) = 1$ *dla* $t > 0$,
(iii) $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \; V_t(\omega) > 0\}\right) > 0$ *dla* $t > 0$.

Pierwsze podstawowe twierdzenie matematyki finansowej określa jednoznacznie, kiedy rynek jest pozbawiony arbitrażu.

Twierdzenie 1.7. *Na rynku $\mathcal{M}$ nie ma możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy istnieje równoważna miara martyngałowa $\mathbb{Q}$. Wówczas cena wypłaty X w chwili $t \in \mathcal{T}$ dana jest wzorem*

$$\Pi_t(X) = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t].$$

Drugie podstawowe twierdzenie matematyki finansowej określa jednoznacznie, kiedy rynek jest zupełny.

Twierdzenie 1.8. *Rynek $\mathcal{M}$ jest zupełny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dokładnie jedna równoważna miara martyngałowa $\mathbb{Q}$.*

Parytet kupna-sprzedaży określa relację w jakiej są cena europejskiej opcji kupna oraz sprzedaży.

Twierdzenie 1.9. *Niech C_t i P_t oznaczają odpowiednio cenę europejskiej opcji kupna oraz europejskiej opcji sprzedaży w chwili $t \leq T$ o tej samej cenie wykonania K oraz tej samej chwili wykonania T. Cena instrumentu bazowego w chwili t wynosi S_t. Wówczas*

$$C_t - P_t = S_t - K B_t^{-1}. \tag{1.1}$$

Gdyby równość (1.1) nie zachodziła, wówczas na rynku wystąpiłaby możliwość arbitrażu.

Rozdział 2

Wycena opcji europejskich

W rozdziale tym przedstawimy zaproponowany przez Duana [2] model wyceny europejskiej opcji kupna oraz sprzedaży przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka.

W sekcji 2.1 zdefiniujemy proces GARCH(p,q), który po raz pierwszy pojawił się w pracy Bollersleva [1]. Wskażemy w oparciu o [9], w jaki sposób z ciągłego procesu cen w modelu Blacka-Scholesa możemy przejść do dyskretnego procesu cen zaproponowanego przez Duana [2].

W sekcji 2.2 zdefiniujemy warunek wyceny przy lokalnie netrualnym podejściu do ryzyka (LRNVR) sformułowany przez Duana [2]. Ponadto sformułujemy oraz udowodnimy twierdzenie, określające kiedy jest spełniony warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka. Dowody lematów oraz twierdzenia podajemy w oparciu o [2], [9].

W sekcji 2.3 sformułujemy oraz udowodnimy twierdzenie charakteryzujące proces zwrotów cen przy zastosowaniu miary lokalnie neutralizującej ryzyko. Sformułowane przez Duana [2] wnioski wynikające z tego twierdzenia pozwolą nam wyrazić cenę europejskiej opcji kupna w kategoriach warunkowej wartości oczekiwanej.

2.1 Proces GARCH(p,q)

Definicja 2.1. *Proces stochastyczny $(\epsilon_t)_{t\in\mathcal{T}}$ nazywamy procesem GARCH(p,q), gdy jest on procesem silnie stacjonarnym oraz spełnia następujące równości*

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} z_t \quad dla \quad t \in \mathcal{T}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j} \quad dla \quad t \in \mathcal{T},$$

gdzie $(z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, $(h_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest pewnym procesem dodatnim oraz $\alpha_0 > 0$, α_i,$\beta_j \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$.

Niech S_t oznacza cenę instrumentu bazowego w chwili $t \in \mathbb{R}^+$. W modelu Blacka-Scholesa przyjmuje się, że proces cen jest geometrycznym procesem Wienera, tzn.

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right), \tag{2.1}$$

gdzie $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera. Parametr μ interpretujemy jako stałą tendencję zmian cen isntrumentu bazowego, parametr σ^2 oznacza współczynnik zmienności cen instrumentu bazowego, natomiast r to stopa procentowa wolna od ryzyka (kapitalizowana w sposób ciągły). Przekształcając wzór (2.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} \exp\left(-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-1) - \sigma W_{t-1}\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t - \sigma W_t\right) \\ &= S_{t-1} \exp\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma + z_t\right), \end{aligned}$$

gdzie $z_t = W_t - W_{t-1} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Niech $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ oznacza premię za ryzyko związaną z danym instrumentem bazowym. Przypuśmy, że zmienność instrumentu bazowego σ^2 zmienia się w czasie zgodnie z informacją $\mathcal{F}_t$ dostępną w chwili $t \in \mathcal{T}$ i oznaczmy tę zmienność przez h_t. Ponieważ zbiór indeksów $\mathcal{T}$ jest dyskretny, przyjmujemy, że zmienność instrumentu bazowego na odcinku $[t-1, t)$ jest stała i wynosi h_{t-1}. Wówczas proces cen ma następującą postać

$$S_t = S_{t-1} \exp\left(r - \frac{1}{2}h_t + \lambda\sqrt{h_t} + \sqrt{h_t} z_t\right). \tag{2.2}$$

Wzór (2.2) został zaproponowany przez Duana [2]. Wówczas proces zwrotów z cen instrumentu bazowego ma postać

$$X_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \epsilon_t, \tag{2.3}$$

gdzie ϵ_t jest procesem GARCH(p,q) względem rynkowej miary $\mathbb{P}$.

Z Definicji 2.1 wynika, że proces $(h_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest procesem prognozowalnym. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}z_t|\mathcal{F}_{t-1}\right]\\ &= r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] &= \mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}z_t|\mathcal{F}_{t-1}]\\ &= h_t\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[z_t|\mathcal{F}_{t-1}] = h_t.\end{aligned}$$

W tym sensie zmienna losowa h_t jest wariancją warunkową zmiennej losowej X_t pod warunkiem σ-algebry $\mathcal{F}_{t-1}$.

Mamy zatem rynek $\mathcal{M} = (S, B, \mathbb{H})$, gdzie $S = (S_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest procesem cen określonym na rynkowej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$, którego wartość S_t w chwili $t \in \mathcal{T}$ dana jest wzorem (2.2), natomiast $B = (B_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest deterministycznym procesem dyskontującym danym wzorem $B_t = e^{rt}$ dla $t \in \mathcal{T}$.

2.2 Lokalna neutralizacja ryzyka

W modelu Blacka-Scholesa przyjmuje się stałą wariancję instrumentu bazowego. Ponadto rynek jest zupełny, tzn. każda wypłata jest replikowalna. Jak wskazuje Venter [9], wprowadzając do modelu zmienność stochastyczną, rynek przestaje być zupełny, ponieważ istnieją wypłaty, dla których nie istnieje strategia replikująca. Duan [2] uogólnił klasyczne podejście do wyceny wprowadzając definicję wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka. Polega to na takiej modyfikacji stóp zwrotu, aby wariancja warunkowa pozostała niezmieniona, natomiast warunkowa wartość oczekiwana była równa stopie wolnej od ryzyka.

Definicja 2.2. *Niech dany będzie rynek $\mathcal{M}$ oraz rynkowa przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$. Mówimy, że miara $\mathbb{Q}$ spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka (LRNVR), gdy spełnione są następujące warunki*

(i) Miary $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ są równoważne, tzn. $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$,
(ii) Stopy zwrotu $\frac{S_t}{S_{t-1}}$ mają rozkład log-normalny względem miary $\mathbb{Q}$,
(iii) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^r$,
(iv) $\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] =: h_t$.

Warunek (iii) Definicji 2.2 oznacza, że wartość oczekiwana względem miary $\mathbb{Q}$ ze stopy zwrotu lokalnie zależy tylko od stopy procentowej r wolnej od ryzyka. O ile ceny instrumentów bazowych S_t są zazwyczaj znane na podstawie obserwacji rynkowych, to zmienność h_t instrumentów bazowych nie jest dana bezpośrednio. Warunek (iv) Definicji 2.2 umożliwia estymację wariancji warunkowej na podstawie obserwacji rynkowych, tzn. względem rynkowej miary $\mathbb{P}$.

Zgodnie z Twierdzeniem 1.8, gdy rynek nie jest zupełny, to miara martyngałowa nie jest wyznaczona w sposób jednoznaczny. Jedną z możliwych miar zaproponował Duan [2]. Niech $(Y_t)_{t\in\mathcal{T}}$ będzie procesem adaptowanym, takim że $Y_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dla $t \in \mathcal{T}$ względem rynkowej miary $\mathbb{P}$. Definiujemy miarę $\mathbb{Q}$ następująco

$$d\mathbb{Q} = \exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right) d\mathbb{P}. \tag{2.4}$$

Stwierdzenie 2.3. *$\mathbb{Q}$ jest miarą równoważną rynkowej mierze probabilistycznej $\mathbb{P}$.*

Dowód. Pokażemy, że $\mathbb{Q}$ jest miarą. Oznaczmy $f := \exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right)$. Niech $A \in \mathcal{F}$. Funkcja f jest nieujemna, zatem $\mathbb{Q}(A) = \int_A d\mathbb{Q} = \int_A f d\mathbb{P} \geq 0$. Dla zbioru pustego $\emptyset$ mamy $\mathbb{Q}(\emptyset) = 0$.

Niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbiorów z $\mathcal{F}$ takim, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $\bigcup_n A_n = A$. Niech $f_n = \sum_{k=1}^{n} f \mathbb{1}_{A_k}$. Wówczas mamy

$$\int_A f_n d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} \int_A f \mathbb{1}_{A_k} d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{Q}\left(A_k\right).$$

Ciąg funkcji (f_n) jest rosnący i zbieżny do funkcji f, więc na mocy twierdzenia Lesbegue'a o zbieżności monotonicznej mamy

$$\mathbb{Q}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{Q}\left(A\right) = \int_A d\mathbb{Q}$$
$$= \int_A f d\mathbb{P} = \lim \int_A f_n d\mathbb{P} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}\left(A_k\right),$$

zatem miara $\mathbb{Q}$ jest przeliczalnie addytywna. Udowodniliśmy zatem, że $\mathbb{Q}$ jest miarą.

Aby pokazać, że miary $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ są równoważne, należy sprawdzić, że są one wzajemnie absolutnie ciągłe (tzn. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ oraz $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$). Weźmy zbiór $A \in \mathcal{F}$ taki, że

$$\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P} = 0.$$

Z własności całki Lesbegue'a wynika, że dla każdej $\mathcal{F}$ -mierzalnej funkcji f zachodzi $\int_A f d\mathbb{P} = 0$, w szczególności

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A d\mathbb{Q} = \int_A \exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right) d\mathbb{P} = 0.$$

Zatem $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Podobnie otrzymujemy $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. ∎

Wykazaliśmy, że miara $\mathbb{Q}$ jest równoważna rynkowej mierze probabilistycznej $\mathbb{P}$. Dosyć łatwo skonstruować przykład dwóch równoważnych miar, gdzie jedna z nich będzie miarą probabilistyczną, zaś druga nie. Wykażemy zatem w kolejnym lemacie, że przy pewnych założeniach dotyczących procesu cen, miara $\mathbb{Q}$ również jest miarą probabilistyczną.

Lemat 2.4. *Jeśli* $S_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_t \exp(-\rho + Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$, *to*

(i) miara $\mathbb{Q}$ *dana wzorem* (2.4) *jest miarą probabilistyczną,*
(ii) dla dowolnej $\mathcal{F}_t$*-mierzalnej zmiennej losowej* W_t *zachodzi*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[W_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t \exp(r-\rho+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]. \tag{2.5}$$

Dowód. Aby udowodnić (i), musimy wykazać, że miara $\mathbb{Q}$ jest unormowana do jedności, tzn. całka po tej mierze jest równa 1. Ponieważ z założeń lematu wynika, że $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-\rho+Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^r$ dla instrumentu pozbawionego ryzyka, więc

$$\begin{aligned}\int d\mathbb{Q} &= \int \exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right)|\mathcal{F}_0\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left((r-\rho)\,(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right) e^r e^{-\rho+Y_T}|\mathcal{F}_{T-1}\right]|\mathcal{F}_0\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left((r-\rho)\,(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right) e^r \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\rho+Y_T}|\mathcal{F}_{T-1}\right]|\mathcal{F}_0\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left((r-\rho)\,(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right)|\mathcal{F}_0\right] \\ &= \cdots = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[1|\mathcal{F}_0\right] = \int d\mathbb{P} = 1.\end{aligned}$$

Aby udowodnić (ii), skorzystamy z własności pochodnej Radona-Nikodyma $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ oraz z definicji i własności warunkowej własności oczekiwanej. Zauważmy, że

$$\int \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] d\mathbb{P} \triangleq \int \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} W_t d\mathbb{P} \triangleq \int W_t d\mathbb{Q}.$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned}&\int \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1}\right] d\mathbb{P} \\ &\triangleq \int \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1}\right] d\mathbb{P} \\ &\triangleq \int \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} \\ &= \int \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] d\mathbb{Q} \triangleq \int W_t d\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem następującą równość

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1}\right]. \tag{2.6}$$

Podstawiając z lewej strony równości (2.6) wzór (2.4) i korzystając z własności warunkowej wartości oczekiwanej oraz adaptowalności procesu (Y_t) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t \exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t \exp\left((r-\rho)\,(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right) e^r e^{-\rho+Y_T}|\mathcal{F}_{T-1}\right]|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t \exp\left((r-\rho)\,(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right) e^r \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\rho+Y_T}|\mathcal{F}_{T-1}\right]|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t \exp\left((r-\rho)\,(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right) e^r e^{-r}|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t \exp\left((r-\rho)\,(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \cdots = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t \exp\left((r-\rho)\,(T-t-1) + \sum_{s=1}^{T-t-1} Y_s\right) e^{t-\rho+Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \exp\left((r-\rho)\,(T-t-1) + \sum_{s=1}^{t-1} Y_s\right) \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t e^{t-\rho+Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}\right].
\end{aligned}
$$

Podobnie, z prawej strony równania (2.6) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right]\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right]\exp\left((r-\rho)\,(T-t-1) + \sum_{s=1}^{t-1} Y_s\right) e^r \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\rho+Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t|\mathcal{F}_{t-1}\right]\exp\left((r-\rho)\,(T-t-1) + \sum_{s=1}^{t-1} Y_s\right).
\end{aligned}
$$

Dzieląc obie strony przez wyrażenie z eksponentem otrzymujemy (2.5). ∎

Przy takich samych założeniach dotyczących procesu cen jak w Lemacie 2.4 wykażemy, że miara $\mathbb{Q}$ jest miarą LRNVR, czyli spełnia Definicję 2.2. Punkt (i) definicji jest spełniony na mocy Stwierdzenia 2.3. Pozostałe punkty Definicji 2.2 wykażemy w następującym Lemacie.

Lemat 2.5. *Jeśli* $S_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_t \exp(-\rho + Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$, *to*

(i) Stopy zwrotu $\frac{S_t}{S_{t-1}}$ *mają rozkład log-normalny względem miary* $\mathbb{Q}$*,*
(ii) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^r$*,*
(iii) $\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] =: h_t$*.*

Dowód. Aby udowodnić (ii) skorzystamy z Lematu 2.4. Zmienne losowe $\frac{S_t}{S_{t-1}}$ są $\mathcal{F}_t$-mierzalne, mamy zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\exp\left(r-\rho+Y_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{e^r}{S_{t-1}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_t\exp\left(\rho+Y_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] = e^r.\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z założeń lematu. Aby udowodnić (i) oraz (iii), zapiszmy zmienną losową $Y_t = \alpha + \beta W_t + U_t$, gdzie U_t ma rozkład normalny o zerowej średniej oraz jest niezależne z $\sigma\left(W_t, \mathcal{F}_{t-1}\right)$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(cW_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(cW_t + r - \rho + Y_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(cW_t + r - \rho + \alpha + \beta W_t + U_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \exp\left(\alpha + r - \rho\right)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\left(c+\beta\right)W_t + U_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \exp\left(\alpha + r - \rho\right)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(U_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right]\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\left(c+\beta\right)W_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \exp\left(\alpha + r - \rho + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[U_t^2|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\left(c+\beta\right)W_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \exp\left(\alpha + r - \rho + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[U_t^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] + \beta\mu_t + \frac{\beta^2 h_t}{2} + \left(\mu_t + \beta h_t\right)c + \frac{c^2 h_t}{2}\right).\end{aligned}$$

Podstawiając $c = 0$ oraz korzystając z faktu, że $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[1|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 1$, otrzymujemy

$$\exp\left(\alpha + r - \rho + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[U_t^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] + \beta\mu_t + \frac{\beta^2 h_t}{2}\right) = 0,$$

zatem

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(cW_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \exp\left(\left(\mu_t + \beta h_t\right)c + \frac{c^2 h_t}{2}\right),$$

a to jest funkcja tworząca momenty rozkładu normalnego. Otrzymujemy więc $W_t = \ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu_t + \beta h_t + \sqrt{h_t}z_t$, gdzie $z_t \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right)$. ■

W przypadku rynku niezupełnego musimy wprowadzić funkcje użyteczności inwestorów oraz ich preferencje względem ryzyka.

Definicja 2.6. *Funkcją użyteczności nazywamy odwzorowanie* $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *takie, że*

(i) $U(x)$ *jest dwukrotnie różniczkowalne,*
(ii) $U(x)$ *jest rosnące, tzn.* $U'(x) > 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}^+$,
(iii) $U(x)$ *jest wklęsłe, tzn.* $U''(x) < 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}^+$.

Punkty (ii) oraz (iii) Definicji 2.6 mają dosyć oczywiste uzasadnienie ekonomiczne. Mówimy, że funkcja użyteczności jest separowalna względem czasu, jeśli użyteczność w chwili $s < t$ nie ma wpływu na użyteczność w chwili t, tzn.

$$\mathbb{E}[U(x_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[U(x_t)].$$

W oparciu o [9] zilustrujemy problem optymalnego wyboru między konsumpcją a inwestycją. Inwestor w chwili $t-1$ decyduje o przeznaczeniu $C_{t-1} \in \mathbb{R}^+$ na konsumpcję oraz $H_{t-1} \in \mathbb{R}$ na inwestycję o losowej wypłacie $S_t \in \mathbb{R}^+$. Zakładamy, że inwestor maksymalizuje swoją oczekiwaną użyteczność z konsumpcji oraz z inwestycji, tzn.

$$\max \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(C_{t-1}) + e^{-\rho}U(C_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} H_{t-2}S_{t-1} &= C_{t-1} + H_{t-1}S_{t-1} \\ H_{t-1}S_t &= C_t + H_tS_t, \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie $H_{t-2}S_{t-1}$ oznacza realizację losowej wypłaty z decyzji inwestycyjnej podjętej w chwili $t-2$, natomiast współczynnik ρ oznacza stopę preferencji czasowej, którą interpretujemy jako premię za odłożenie konsumpcji w czasie (racjonalny inwestor preferuje konsumpcję bieżącą nad konsumpcję przyszłą). Ponieważ zmienna losowa C_{t-1} jest $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna, mamy

$$\max(U(C_{t-1}) + e^{-\rho}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(C_t)|\mathcal{F}_{t-1}]).$$

Podstawiając warunki (2.7) otrzymujemy

$$\max(U(H_{t-2}S_{t-1} - H_{t-1}S_{t-1}) + e^{-\rho}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(H_{t-1}S_t - H_tS_t)|\mathcal{F}_{t-1}]).$$

Inwestor maksymalizuje oczekiwaną użyteczność względem H_{t-1}, zatem

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial H_{t-1}}U(H_{t-2}S_{t-1} - H_{t-1}S_{t-1}) + \frac{\partial}{\partial H_{t-1}}e^{-\rho}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(H_{t-1}S_t - H_tS_t)|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= -S_{t-1}U'(H_{t-2}S_{t-1} - H_{t-1}S_{t-1}) + e^{-\rho}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_tU'(H_{t-1}S_t - H_tS_t)|\mathcal{F}_{t-1}], \end{aligned}$$

co po odpowiednich przekształceniach daje tzw. równanie Eulera dla konsumpcji postaci

$$S_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_t e^{-\rho} \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} | \mathcal{F}_{t-1}].$$

Duan [2] zaproponował miarę $\mathbb{Q}$ daną wzorem (2.4). Na mocy Lematu 2.4 oraz Lematu 2.5 miara $\mathbb{Q}$ jest miarą probabilistyczną spełniającą warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka, o ile zachodzi

$$S_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_t \exp(-\rho + Y_t) | \mathcal{F}_{t-1}].$$

Zatem Y_t we wzorze (2.4) jest logarytmem z krańcowej stopy substytucji, tzn. $Y_t = \ln \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})}$.

Definicja 2.7. *Absolutną awersją do ryzyka związaną z funkcją użyteczności $U(x)$ nazywamy funkcję $A(x)$ daną następującym równaniem*

$$A(x) = -\frac{U'(x)}{U''(x)} = -\frac{d}{dx} \ln U'(x). \tag{2.8}$$

Z tego, że funkcja użyteczności $U(x)$ jest rosnąca oraz wklęsła wynika, że $A(x)$ jest funkcją nieujemną. W przypadku dyskretnym równanie (2.8) przybiera następującą postać

$$A(x) = -\frac{\ln U'(x_t) - \ln U'(x_{t-1})}{x_t - x_{t-1}}.$$

Definicja 2.8. *Relatywną awersją do ryzyka związaną z funkcją użyteczności $U(x)$ nazywamy funkcję $A(x)$ daną następującym równaniem*

$$R(x) = xA(x) = -x\frac{U'(x)}{U''(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} \ln U'(x)}{\frac{d}{dx} \ln x}. \tag{2.9}$$

W przypadku dyskretnym równanie (2.9) przybiera następującą postać

$$R(x) = -\frac{\ln U'(x_t) - \ln U'(x_{t-1})}{\ln x_t - \ln x_{t-1}}.$$

Następne twierdzenie podaje warunki, które powinny spełniać funkcje użyteczności, aby miara $\mathbb{Q}$ była na danym rynku miarą LRNVR.

Twierdzenie 2.9. *Niech dany będzie rynek $\mathcal{M}$, rynkowa przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$ oraz addytywna i separowalna względem czasu funkcja użyteczności $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Niech $(Y_t)_{t\in\mathcal{T}}$ będzie procesem adaptowanym takim, że $Y_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ względem miary $\mathbb{P}$ dla $t \in \mathcal{T}$. Jeśli inwestor maksymalizuje oczekiwaną użyteczność, to miara $\mathbb{Q}$ dana wzorem*

$$d\mathbb{Q} = \exp\left((r-\rho)\,T + \sum_{s=1}^{T} Y_s\right) d\mathbb{P}$$

spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka, gdy spełniony jest jeden z warunków

(i) funkcja użyteczności U zapewnia stałą absolutną awersję do ryzyka $A(x) = \lambda_1$ oraz $C_t - C_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ względem miary $\mathbb{P}$,

(ii) funkcja użyteczności U zapewnia stałą relatywną awersję do ryzyka $R(x) = \lambda_2$ oraz $\ln(C_t) - \ln(C_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ względem miary $\mathbb{P}$,

(iii) funkcja użyteczności U jest liniowa, tzn. $U(x) = ax + b$.

Dowód. Jeśli inwestor maksymalizuje oczekiwaną użyteczność, to

$$S_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_t e^{-\rho}\frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})}|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Z Lematu 2.4 oraz Lematu 2.5 wynika, że jeśli

$$S_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_t \exp(-\rho + Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}],$$

to miara $\mathbb{Q}$ spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka. Ponieważ zmienne losowe Y_t mają rozkład normalny względem rynkowej miary $\mathbb{P}$, należy zatem pokazać, że logarytmy z krańcowej stopy substytucji $\ln\frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})}$ mają również rozkład normalny względem $\mathbb{P}$.

(i) Mamy

$$A(x) = -\frac{\ln U'(x_t) - \ln U'(x_{t-1})}{x_t - x_{t-1}} = \lambda_1,$$

zatem

$$\ln\frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} = -\lambda_1(C_t - C_{t-1}) \sim \mathcal{N}(-\lambda_1\nu, \lambda_1^2\sigma^2).$$

(ii) Mamy

$$R(x) = -\frac{\ln U'(x_t) - \ln U'(x_{t-1})}{\ln x_t - \ln x_{t-1}},$$

zatem

$$\ln \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} = -\lambda_2 \left(\ln U(C_t) - \ln U(C_{t-1}\right) \sim \mathcal{N}(-\lambda_2 \nu, \lambda_2^2 \sigma^2).$$

(iii) Mamy $U(C_t) = aC_t + b$ oraz $U'(C_t) = a$, zatem

$$\ln \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} = \ln \frac{a}{a} = 0 = \delta(t),$$

gdzie

$$\delta_t = \lim_{\sigma_t^2 \to 0} \mathcal{N}(0, \sigma_t^2).$$

■

2.3 Cena europejskiej opcji kupna

Wzór (2.3) przedstawia proces log-zwrotow z cen instrumentu bazowego względem rynkowej miary $\mathbb{P}$. Następujące twierdzenie głosi, że równoważna miara $\mathbb{Q}$, spełniająca Definicję 2.2 przekształca proces log-zwrotów, eliminując z jego jawnej postaci współczynnik premii za ryzyko λ i wprowadzając zależność wariancji warunkowej h_t od tegoż czynnika.

Twierdzenie 2.10. *Niech dany będzie rynek $\mathcal{M}$, rynkowa przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$ oraz miara $\mathbb{Q}$. Jeśli miara $\mathbb{Q}$ spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka, to proces log-zwrotów z cen instrumentu bazowego ma nasępującą postać*

$$X_t = ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} h_t + \xi_t, \tag{2.10}$$

gdzie $\xi_t = \sqrt{h_t} z_t$, $(z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}. \tag{2.11}$$

Dowód. Z Lematu 2.5 wynika, że stopy zwrotu $\frac{S_t}{S_{t-1}}$ mają rozkład log-normalny, możemy więc log-zwroty zapisać jako

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \eta_t + \sqrt{h_t} z_t,$$

gdzie $\eta_t = \mathbb{E}[\ln(S_t/S_{t-1})]$ oraz $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pokażemy, że $\eta_t = r - \frac{1}{2}h_t$. Istotnie, mamy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\eta_t + \sqrt{h_t}z_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^{\eta_t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\sqrt{h_t}z_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^{\eta_t + \frac{1}{2}h_t}.$$

Z Definicji 2.2 mamy

$$h_t = \mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}]$$

oraz

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^r,$$

zatem $r = \eta_t + \frac{1}{2}h_t$ czyli $\eta_t = r - \frac{1}{2}h_t$. Teraz pokażemy, że h_t może być wyrażone wzorem (2.11). Ponieważ

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \epsilon_t$$

względem miary $\mathbb{P}$ oraz

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}, \tag{2.12}$$

zatem mamy $r+\lambda\sqrt{h_t}-\frac{1}{2}h_t+\epsilon_t = r-\frac{1}{2}h_t+\xi_t$. Otrzymujemy więc $\epsilon_t = \xi_t - \lambda\sqrt{h_t}$ co podstawiamy do (2.12) i otrzymujemy (2.11). ■

Wniosek 2.11. *Jeśli miara $\mathbb{Q}$ spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka, to cena instrumentu bazowego w chwili T dana jest następującym wzorem*

$$S_T = S_t \exp\left((T-t)\, r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T} h_s + \sum_{s=t+1}^{T} \xi_s \right). \tag{2.13}$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 2.10 log-zwroty mają postać $\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - 0.5h_t + \xi_t$. Korzystając z własności logarytmu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\ln \frac{S_T}{S_t} &= \ln(\frac{S_T}{S_{T-1}} \frac{S_{T-1}}{S_{T-2}} \dots \frac{S_{t+1}}{S_t}) \\ &= \ln \frac{S_T}{S_{T-1}} + \ln \frac{S_{T-1}}{S_{T-2}} + \dots + \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} \\ &= r - \frac{1}{2}h_T + \xi_T + r - \frac{1}{2}h_{T-1} + \xi_{T-1} + \dots + r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \xi_{t+1} \\ &= (T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T} h_s + \sum_{s=t+1}^{T} \xi_s.\end{aligned}$$

Działając na obie strony eksponentem otrzymujemy (2.13). ∎

Wniosek 2.12. *Jeśli miara $\mathbb{Q}$ spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka, to zdyskontowany proces cen $e^{-rt}S_t$ jest martynagałem względem miary $\mathbb{Q}$.*

Dowód. Pokażemy, że $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S_T|\mathcal{F}_t] = e^{-rt}S_t$. Istotnie, na mocy Wniosku 2.11 mamy

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S_T|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S_t \exp((T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T} h_s + \sum_{s=t+1}^{T} \xi_s)|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-rt}S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\exp(-\frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T} h_s + \sum_{s=t+1}^{T} \xi_s)|\mathcal{F}_t].\end{aligned}$$

Następnie iterując wartości oczekiwane względem filtracji oraz korzystając z faktów, że proces h_t jest prognozowalny oraz proces ξ_t ma rozkład normalny o zerowej średniej oraz wariancji h_t, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&e^{-rt}S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\exp(-\frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T} h_s + \sum_{s=t+1}^{T} \xi_s)|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{T-2}]|\dots]|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-rt}S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots\exp(-\frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T-1} h_s + \sum_{s=t+1}^{T-1} \xi_s)e^{-\frac{1}{2}h_T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\xi_T}|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_{T-2}]|\dots]|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-rt}S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\dots\exp(-\frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T-1} h_s + \sum_{s=t+1}^{T-1} \xi_s)|\mathcal{F}_{T-2}]|\mathcal{F}_{T-3}]|\dots]|\mathcal{F}_t] \\ &= \dots = e^{-rt}S_t.\end{aligned}$$

■

Wniosek 2.13. *Niech dana będzie europejska opcja kupna z ceną wykonania K oraz datą wygaśnięcia T. Jeśli miara $\mathbb{Q}$ spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka, to cena opcji w chwili t dana jest następującym wzorem*

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)|\mathcal{F}_t]. \tag{2.14}$$

Dowód. Na mocy Wniosku 2.12 zdyskontowany proces cen jest martyngałem względem miary $\mathbb{Q}$, więc zgodnie z Definicją 1.5 miara ta jest miarą martyngałową. Zatem na mocy Twierdzenia 1.7 na rynku nie ma możliwości arbitrażu. Wówczas cena arbitrażowa w chwili t wypłaty X dana jest wzorem

$$\Pi_t(X) = B_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[XB_T^{-1}|\mathcal{F}_t]$$

dla dowolnej miary martyngałowej $\mathbb{Q}$, gdzie B_t jest deterministyczym procesem dyskontującym. Wypłata europejskiej opcji kupna dana jest wzorem $\max(S_T - K, 0)$, zatem

$$\begin{aligned} C_t^{GH} &= e^{tr}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-Tr}\max(S_T - K, 0)|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-(T-t)r}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

■

Wniosek 2.14. *Niech dana będzie europejska opcja sprzedaży z ceną wykonania K oraz datą wygaśnięcia T. Jeśli miara $\mathbb{Q}$ spełnia warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka, to cena opcji w chwili t dana jest następującym wzorem*

$$P_t^{GH} = e^{-(T-t)r}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(K - S_T, 0)|\mathcal{F}_t].$$

Dowód. Wynika to z Twierdzenia 1.9. ■

Rozdział 3

Wycena opcji z wykorzystaniem modelu GARCH(1,1)

W rodziale tym zastosujemy model GARCH(1,1) do wyceny opcji.

W sekcji 3.1, w oparciu o [4], sformułujemy oraz udowodnimy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności silnego rozwiązania procesu GARCH(1,1). Jako wniosek otrzymamy warunek na istnienie słabo stacjonarnego rozwiązania.

W sekcji 3.2 podamy kilka własności modelu GARCH(1,1) względem miary lokalnie neutralizującej ryzyko. Twierdzenie udowodnimy bazując na [2], [9].

W sekcjach 3.3 oraz 3.4, w oparciu o [8], przedstawimy metodę największej wiarygodności do estymacji parametrów modelu GARCH(1,1) oraz podamy algorytm Monte-Carlo służący do oszacowania ceny europejskiej opcji kupna i sprzedaży.

W sekcji 3.5 przedstawimy wyniki empiryczne otrzymane z zastosowania wyżej otrzymanych rezultatów do wybranego instrumentu finansowego.

3.1 Stacjonarność modelu

Rozważmy proces GARCH(1,1). Zgodnie z Definicją 2.1 ma on następującą postać

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \sqrt{h_t} z_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} = \alpha_0 + (\alpha z_{t-1}^2 + \beta)h_{t-1}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie $(z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Mamy zatem stochastyczne równanie rekurencyjne postaci $Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t$.

Twierdzenie 3.1. *Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$ oraz proces GARCH(1,1) określony na tej przestrzeni. Jeśli $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\ln(\alpha z_t^2+\beta)] < 0$, to szereg*

$$h_t = \alpha_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right) \tag{3.2}$$

jest zbieżny prawie na pewno oraz jest on jedynym silnie stacjonarym rozwiązaniem procesu GARCH(1,1). Jeśli $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\ln(\alpha z_t^2 + \beta)] \geq 0$, to szereg (3.2) jest robieżny.

Dowód. Niech $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\ln(\alpha z_t^2 + \beta)] < 0$. Silna stacjonarność rozwiązania wynika wprost z definicji 2.1. Iterując k-krotnie równanie (3.1) otrzymujemy

$$h_t = \alpha_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right) + h_{t-k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\alpha z_{t-i}^2 + \beta\right). \tag{3.3}$$

Zauważmy, że składniki sumy występującej we wzorze (3.3) są nieujemne, ponieważ α, $\beta \geq 0$. Zmienne losowe $\ln(\alpha z_t^2 + \beta)$ są niezależne o jednakowym rozkładzie, zatem na mocy silnego prawa wielkich liczb mamy

$$\begin{aligned} &\left[\prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right]^{i^{-1}} \\ &= \exp\left[i^{-1} \sum_{j=1}^{i} \ln\left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right] \xrightarrow{i\to\infty} \exp\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\ln\left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right]\right). \end{aligned}$$

Z założeń twierdzenia wynika, że $\exp\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\ln\left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right]\right) < 1$, zatem na mocy kryterium Cauchy'ego szereg występujący w (3.3) jest zbieżny. Ostatni składnik w (3.3) dąży do 0 przy $k \to \infty$.

Niech h_t dane wzorem (3.2) jest rozwiązaniem stacjonarnym równania (3.1) oraz załóżmy, że $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\ln(\alpha z_t^2 + \beta)] > 0$. Wówczas na mocy kryterium Cauchy'ego mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right) = \infty,$$

więc szereg (3.2) jest rozbieżny.

Niech h_t dane wzorem (3.2) jest rozwiązaniem stacjonarnym równania (3.1) oraz załóżmy, że $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\ln(\alpha z_t^2+\beta)] = 0$. W tym przypadku kryterium Cauchy'ego nie daje nam odpowiedzi na temat zbieżności lub rozbieżności szeregu. Przypuśćmy jednak, że szereg (3.2) jest zbieżny. Zauważmy, że

$$h_t \geq \alpha_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta \right) \right),$$

skąd wnioskujemy, że iloczyn $\prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta \right)$ dąży do 0 przy $i \to \infty$, co jest równoważne z tym, że $\sum_{j=1}^{i} \ln \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta \right)$ dąży do $-\infty$ przy $i \to \infty$. Z drugiej jednak strony $\sum_{j=1}^{i} \ln \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta \right)$ jest błądzeniem losowym takim, że

$$\limsup_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} \ln \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta \right) = \infty,$$

co przeczy założeniu, że szereg (3.2) jest zbieżny. .

Aby wykazać jednoznaczność rozwiązania załóżmy, że $\tilde{h}_t$ jest stacjonarnym rozwiązaniem procesu $\tilde{\epsilon}_t = \sqrt{\tilde{h}_t} z_t$. Iterując $\tilde{h}_t$ k-krotnie otrzymujemy

$$\tilde{h}_t = \alpha_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta \right) \right) + \tilde{h}_{t-k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\alpha z_{t-i}^2 + \beta \right).$$

Wówczas mamy

$$|h_t - \tilde{h}_t| = |h_t - \alpha_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta \right) \right) - \tilde{h}_{t-k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\alpha z_{t-i}^2 + \beta \right)|. \tag{3.4}$$

Środkowy składnik z prawej strony równości (3.4) dąży do h_t, natomiast ostatni składnik dąży do 0 przy $k \to \infty$. Zatem $|h_t - \tilde{h}_t| \to 0$. ∎

Wniosek 3.2. *Proces GARCH(1,1) ma słabo stacjonarne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\alpha + \beta < 1$. *Ponadto wariancja procesu nie zmienia się w czasie i wynosi* $\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[\epsilon_t] = \alpha_0/(1-\alpha-\beta)$.

Dowód. Zauważmy, że $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\epsilon_t] = 0$. Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sqrt{h_t} z_t\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[z_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}}\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}}\right]\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[z_t\right] = 0,\end{aligned}$$

ponieważ $(z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ dla $t \in \mathcal{T}$.

Najpierw udowodnimy "$\Rightarrow$". Załóżmy, że proces GARCH(1,1) ma słabo stacjonarne rozwiązanie. Wówczas mamy

$$\begin{gathered}\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t^2\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[h_t z_t^2\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\alpha_0 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}\right) z_t^2\right] \\ = \alpha_0\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[z_t^2\right] + \alpha\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_{t-1}^2 z_t^2\right] + \beta\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[h_{t-1} z_t^2\right] = \alpha_0 + \alpha\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_{t-1}^2\right] + \beta\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[h_{t-1} z_{t-1}^2\right] \\ = \alpha_0 + \alpha\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_{t-1}\right] + \beta\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_{t-1}\right] = \alpha_0 + \alpha\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t\right] + \beta\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t\right].\end{gathered}$$

Ostatnia równość wynika z założenia o słabej stacjonarności. Porządkując wyrazy otrzymujemy $\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}[\epsilon_t] = \alpha_0/(1-\alpha-\beta)$. Z Definicji 2.1 mamy, że $\alpha_0 > 0$ oraz α, $\beta \geq 0$, zatem $1 - \alpha - \beta > 0$, czyli $\alpha + \beta < 1$.

Teraz udowodnimy "$\Leftarrow$". Załóżmy, że $\alpha + \beta < 1$. Wówczas korzystając z nierówności Jensena otrzymujemy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\ln\left(\alpha z_t^2 + \beta\right)\right] \leq \ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\alpha z_t^2 + \beta\right]\right) = \ln\left(\alpha + \beta\right) < 0,$$

zatem założenie Twierdzenia 3.1 jest spełnione, czyli istnieje stacjonarne rozwiązanie dane wzorem (3.2). Wówczas mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t^2\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[h_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\alpha_0\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}\left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right)\right] \\ &= \alpha_0\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\prod_{j=1}^{i}\left(\alpha z_{t-j}^2 + \beta\right)\right]\right) \\ &= \alpha_0\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\alpha + \beta\right)^i\right) = \alpha_0\sum_{i=0}^{\infty}\left(\alpha+\beta\right)^i = \frac{\alpha_0}{1-\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\epsilon_t^2\right] < \infty$, zatem korzystając z Faktu 1.3 proces GARCH(1,1) ma słabo stacjonarne rozwiązanie. ∎

3.2 Własności modelu

Zgodnie z Twierdzeniem 2.10, po przejściu od rynkowej miary $\mathbb{P}$ do miary lokalnie neutralizującej ryzyko $\mathbb{Q}$, mamy $\xi_t = \sqrt{h_t} z_t$, gdzie $(z_t)_{t \in \mathcal{T}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha \left(\xi_{t-1} - \lambda \sqrt{h_{t-1}} \right)^2 + \beta h_{t-1} \\ &= \alpha_0 + \alpha \left(z_{t-1} \sqrt{h_{t-1}} - \lambda \sqrt{h_{t-1}} \right)^2 + \beta h_{t-1} \\ &= \alpha_0 + \alpha h_{t-1} \left(z_{t-1} - \lambda \right)^2 + \beta h_{t-1}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 3.3. *Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}, \mathbb{P})$, proces GARCH(1,1) określony na tej przestrzeni oraz miara $\mathbb{Q}$ spełniająca warunek wyceny przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka. Jeśli spełniony jest warunek*

$$|\lambda| < \sqrt{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha}}, \tag{3.5}$$

to proces $(\xi_t)_{t \in \mathcal{T}}$ posiada następujące własności

(i) $\lim_{t \to \infty} \mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}[\xi_t] = \frac{\alpha_0}{1-(1-\lambda^2)\alpha-\beta}$,
(ii) rozkład zmiennej losowej ξ_t jest kurtoleptyczny,
(iii) $\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}[z_t, h_{t+1}] = \frac{-2\lambda\alpha_0\alpha}{1-(1-\lambda^2)\alpha-\beta}$.

Dowód. (i) Oznaczmy $x_t := z_t - \lambda$. Wówczas mamy

$$h_t = \alpha_0 + \left(\alpha x_{t-1}^2 + \beta \right) h_{t-1}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[x_t^2 \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(z_t - \lambda)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[z_t^2 \right] - 2\lambda \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[z_t \right] + \lambda^2 = 1 + \lambda^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[x_t^4 \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(z_t - \lambda)^4 \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[z_t^4 \right] - 4\lambda \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[z_t^3 \right] + 6\lambda^2 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[z_t^2 \right] - 4\lambda^3 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[z_t \right] + \lambda^4 \\ &= 3 + 6\lambda^2 + \lambda^4, \end{aligned} \tag{3.7}$$

ponieważ dla zmiennej losowej $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ mamy $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t^3\right] = 0$ oraz $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t^4\right] = 3$.

Iterując h_t do chwili $t = 0$ otrzymujemy

$$h_t = \alpha_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{t-1} \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha x_{t-j}^2 + \beta \right) \right] + h_0 \prod_{i=j}^{t} \left(\alpha x_{t-j}^2 + \beta \right)$$
$$= \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} G_i + h_0 G_t,$$

gdzie ciąg (G_k) dany jest wzorem

$$G_0 := 1$$
$$G_k := \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha x_{t-j}^2 + \beta \right) = G_{k-1} \left(\alpha x_{t-k}^2 + \beta \right)$$

Korzystając z (3.6) oraz z niezależności zmiennych losowych x_t, otrzymujemy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[G_k \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\prod_{j=1}^{i} \left(\alpha x_{t-j}^2 + \beta \right) \right]$$
$$= \prod_{j=1}^{i} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\alpha x_{t-j}^2 + \beta \right] = \prod_{j=1}^{i} \left(\alpha \left(1 + \lambda^2 \right) + \beta \right)$$
$$= \left(\alpha \left(1 + \lambda^2 \right) + \beta \right)^i.$$

Wracając do h_t mamy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[h_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} G_i + h_0 G_t \right] = \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[G_i \right] + h_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[G_t \right]$$
$$= \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\alpha \left(1 + \lambda^2 \right) + \beta \right)^i + h_0 \left(\alpha \left(1 + \lambda^2 \right) + \beta \right)^t.$$

Korzystając z nierówności (3.5) mamy

$$\alpha \left(1 + \lambda^2 \right) + \beta < \alpha \left(1 + \frac{1 - \alpha - \beta}{\alpha} \right) + \beta = 1,$$

zatem przechodząc do granicy otrzymujemy skończony szereg geometryczny

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[h_t] = \lim_{t\to\infty} \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\alpha\left(1+\lambda^2\right)+\beta\right)^i$$

$$= \alpha_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha\left(1+\lambda^2\right)+\beta\right)^i = \frac{\alpha_0}{1-\alpha\left(1+\lambda^2\right)-\beta}.$$

(ii) Ponieważ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_t]=0$, aby wykazać, że rozkład zmiennej losowej ξ_t jest leptokurtyczny, należy wykazać, że

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_t^4\right] > 3\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_t^2\right]\right)^2. \tag{3.8}$$

Korzystając z (3.7) oraz z niezależności zmiennych losowych x_t, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_k^2\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_{k-1}^2\left(\alpha x_{t-k}^2+\beta\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_{k-1}^2\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\alpha x_{t-k}^2+\beta\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_{k-1}^2\right]\left(\alpha^2\left(3+6\lambda^2+\lambda^4\right)+2\alpha\beta\left(1+\lambda^2\right)+\beta^2\right) \\
&= \left(\alpha^2\left(3+6\lambda^2+\lambda^4\right)+2\alpha\beta\left(1+\lambda^2\right)+\beta^2\right)^k.
\end{aligned}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$u = \alpha^2\left(3+6\lambda^2+\lambda^4\right)+2\alpha\beta\left(1+\lambda^2\right)+\beta^2,$$

$$v = \alpha\left(1+\lambda^2\right)+\beta.$$

Zauważmy, że $u>v$ oraz $u=v^2+2\left(1+2\lambda^2\right)\alpha^2$. Dla $k>j$ mamy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G_kG_j] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_j^2\prod_{i=j}^{k}\left(\alpha x_{t-2k+i}^2+\beta\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_j^2\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=j}^{k}\left(\alpha x_{t-2k+i}^2+\beta\right)\right] = u^jv^{k-j}.$$

Wówczas mamy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h_t^2\right] = h_0^2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_t^2\right] + 2\alpha_0 h_0 \sum_{k=0}^{t-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_t G_k\right] + \alpha_0^2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\sum_{k=0}^{t-1} G_k\right)^2\right]$$

$$= h_0^2 u^t + 2\alpha_0 h_0 \sum_{k=0}^{t-1} u^k v^{t-k} + \alpha_0^2\left(\sum_{k=0}^{t-1} u^k + 2\sum_{k=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{k-1} u^j v^{k-j}\right)$$

$$= h_0^2 u^t + 2\alpha_0 h_0 \frac{v\left(u^t - v^t\right)}{u-v} + \alpha_0^2\left(\frac{1-u^t}{1-u} + 2\frac{v}{u-v}\left(\frac{1-u^t}{1-u} - \frac{1-v^t}{1-v}\right)\right).$$

Przechodząc do granicy przy $t \to \infty$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h_t^2\right] \to \begin{cases} \frac{(1+v)\alpha_0^2}{(1-u)(1-v)} & \text{dla} \quad u<1 \\ \infty \quad \text{dla} \quad u \geq 1 \end{cases}$$

Korzystając z własności rozkładu normalnego mamy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_t^4\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t^4 h_t^2\right] = 3\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h_t^2\right].$$

Gdy $u \geq 1$, to nierówność (3.8) jest spełniona. Dla $u < 1$ mamy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_t^4\right] = 3\frac{(1+v)\,\alpha_0^2}{(1-u)\,(1-v)}$$

$$= 3\frac{(1+v)\,(1-v)\,\alpha_0^2}{(1-u)\,(1-v)^2} = 3\frac{1-v^2}{1-u}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_t^2\right]\right)^2.$$

Ponieważ $v < u < 1$, więc $\left(1-v^2\right)/\left(1-u\right) > 1$, co dowodzi (3.8).

(iii) Ponieważ $z_t h_{t+1} = \alpha_0 z_t + \alpha z_t\left(\sqrt{h_t} z_t - \lambda\sqrt{h_t}\right)^2 + \beta z_t h_t$, więc mamy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t h_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\alpha_0 z_t + \alpha z_t\left(\sqrt{h_t} z_t - \lambda\sqrt{h_t}\right)^2 + \beta z_t h_t | \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\alpha z_t\left(\sqrt{h_t} z_t - \lambda\sqrt{h_t}\right)^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

$$= \alpha\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t^3 h_t - 2\lambda z_t^2 h_t + \lambda^2 h_t z_t | \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

$$= \alpha h_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t^3 | \mathcal{F}_{t-1}\right] - 2\alpha\lambda h_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] + \alpha\lambda^2 h_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] = -2\alpha\lambda h_t.$$

Wówczas mamy

$$\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}\left[z_t, h_{t+1}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t h_{t+1}\right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h_{t+1}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[z_t h_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[-2\alpha\lambda h_t\right]$$

$$= -2\alpha\lambda\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h_t\right] = \frac{-2\alpha\lambda\alpha_0}{1 - \left(1-\lambda^2\right)\alpha - \beta}.$$

$\blacksquare$

3.3 Estymacja parametrów modelu metodą największej wiarygodności

Niech dany będzie wektor $x = (x_1, \ldots, x_T)$ skłądający się z T oberwacji log-zwrotów pewnego instrumentu finansowego. Zakładamy, że

$$x_t = r - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}z_t,$$

gdzie $(z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz $h_t = \alpha_0 + \alpha\left(\sqrt{h_{t-1}}z_{t-1} - \lambda\sqrt{h_{t-1}}\right)^2 + \beta h_{t-1}$. Ponieważ $x_t \sim \mathcal{N}(r - \frac{1}{2}h_t, h_t)$, zatem funkcja wiarygodności dla t-tej obserwacji ma postać

$$l_t(x_t;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}}\exp\left(-\frac{(x_t - r + \frac{1}{2}h_t)^2}{2h_t}\right),$$

gdzie $\theta = (\alpha_0, \alpha, \beta, \lambda)$ jest wektorem szukanych parametrów. Funkcja wiarygodności dla wektora obserwacji x ma postać

$$\mathcal{L}(x;\theta) = \prod_{t=1}^{T} l_t(x_t;\theta) \tag{3.9}$$

Łatwiej obliczyć logarytm naturalny z wyrażenia (3.9), mamy zatem

$$\begin{aligned}\ln\mathcal{L}(x;\theta) &= \ln\left(\prod_{t=1}^{T} l_t(x_t;\theta)\right) = \sum_{t=1}^{T}\ln\left(l_t(x_t;\theta)\right)\\ &= -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(h_t) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{(x_t - r + \frac{1}{2}h_t)^2}{2h_t}.\end{aligned}$$

Szukamy $\hat{\theta}$ będącego rozwiązaniem zadania

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta}\ln\left(\mathcal{L}(x;\theta)\right)$$

przy ograniczeniach $\alpha_0 > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$ oraz $\alpha + \beta < 1$.

3.4 Przybliżona wycena opcji metodą Monte-Carlo

Log-zwroty x_t po lokalnej neutralizacji ryzyka, to znaczy po przejściu do miary $\mathbb{Q}$ mają postać

$$x_t = r - \frac{1}{2}h_t + \xi_t,$$

gdzie $\xi_t = \sqrt{h_t}z_t$, $(z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz $h_t = \alpha_0 + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda\sqrt{h_{t-1}})^2 + \beta h_{t-1}$.

Przypuśćmy, że chcemy poznać cenę w chwili $t = 0$ europejskiej opcji kupna z chwilą wykonania $t = T$ oraz ceną wykonania K. Cena instrumentu bazowego w chwili $t = 0$ jest znana i wynosi S_0. Zgodnie ze wzorem (2.14) na cenę opcji kupna, musimy znać warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)|\mathcal{F}_0]$. Przeprowadzamy M symulacji trajektorii procesu cen S instrumentu bazowego według następującej procedury

1. Przyjmujemy $h_{j,0} = \frac{\alpha_0}{1-(1-\lambda^2)\alpha-\beta}$.
2. Generujemy $z_{j,0}$ z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.
3. $\xi_{j,0} = \sqrt{h_{j,0}}z_{j,0}$.
4. $\hat{h_{j,1}} = \alpha_0 + \alpha\left(\xi_{j,0} - \lambda\sqrt{h_{j,0}}\right)^2 + \beta h_{j,0}$.
5. Generujemy $z_{j,1}$ z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.
6. $\xi_{j,1} = \sqrt{h_{j,1}}z_{j,1}$.
7. $S_{j,1} = S_{j,0}\exp\left(-\frac{1}{2}h_{j,1} + \xi_{j,1}\right)$.
8. Powtarzamy kroki 4. - 7. aż do uzyskania $S_{j,T}$.

Powtarzając powyższą procedurę dla $j = 2,\dots,M$ otrzymujemy wektor $S_T = (S_{1,T},\dots,S_{M,T})$. Wówczas cenę opcji kupna przybliżamy następująco

$$\begin{aligned} C_0^{GH} &= e^{-Tr}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)|\mathcal{F}_0] \\ &= e^{-Tr}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)] \approx e^{-Tr}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\max(S_{j,T} - K, 0). \end{aligned}$$

3.5 Wyniki empiryczne

W tej sekcji podamy wyniki empiryczne uzyskane przez zastosowanie dwóch metod numerycznych przedstawionych w sekcjach 3.3 oraz 3.4. Po pierwsze dokonamy estymacji parametrów α_0, α, β oraz λ metodą największej wiarygodności. Następnie dokonamy aproksymacji ceny europejskiej opcji kupna stosując metodę Monte Carlo. Otrzymane wyniki porównamy z cenami otrzymanymi ze wzoru Blacka-Scholesa.

Jako instrument bazowy rozważmy akcję spółki *Amazon.com, Inc.* notowanej na giełdzie NYSE. Estymacji parametrów dokonamy w oparciu o ceny zamknięcia w latach 2016-2019 (1005 obserwacji). Na Wykresach 3.1-3.3 przedstawiono jak kształtowały się ceny oraz log-zwroty instrumentu bazowego w badanym okresie. Parametry oszacone metodą największej wiarygodności wynoszą

$$\begin{aligned} \hat{\alpha_0} &= 1.2 \times 10^{-5}, \\ \hat{\alpha} &= 0.07, \\ \hat{\beta} &= 0.68, \\ \hat{\lambda} &= 1.29, \end{aligned}$$

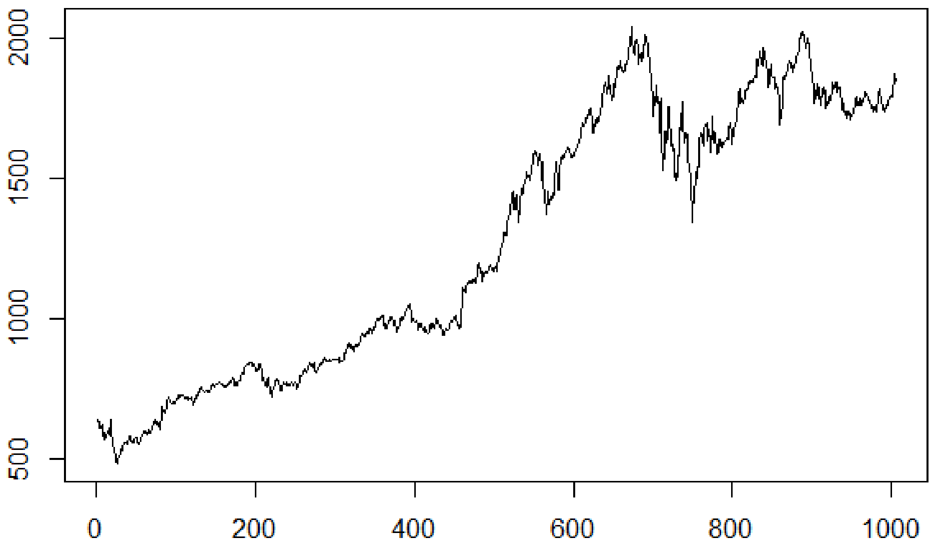
natomiast wariancja na mocy Twierdzenia 3.3 wynosi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\alpha_0}}{1 - (1 - \hat{\lambda}^2)\hat{\alpha} - \hat{\beta}} = 9.42 \times 10^{-5}.$$

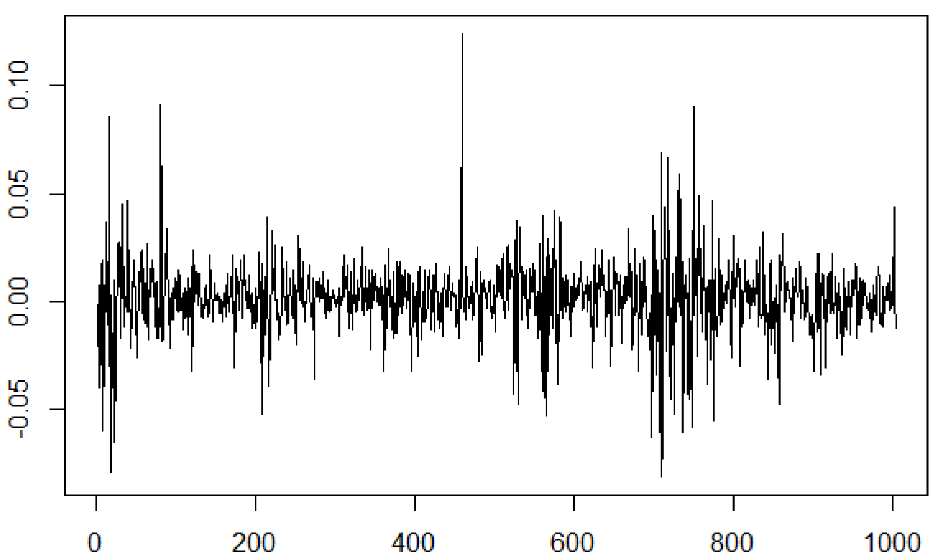
Cena w ostatniej obserwacji wynosiła $S_{1005} = 1856.89$. Rozważmy europejskie opcje kupna z ceną wykonania $K = S_{1005}$ oraz z terminami wykonania za 3, 6 oraz 12 miesięcy. W Tabeli 3.5 przedstawiono ceny C^{GH} otrzymane metodą Monte Carlo oraz ceny C^{BS} otrzymane ze wzoru Blacka-Scholesa. Przyjmujemy stopę procentową $r = 0$.

Tabela 3.1:

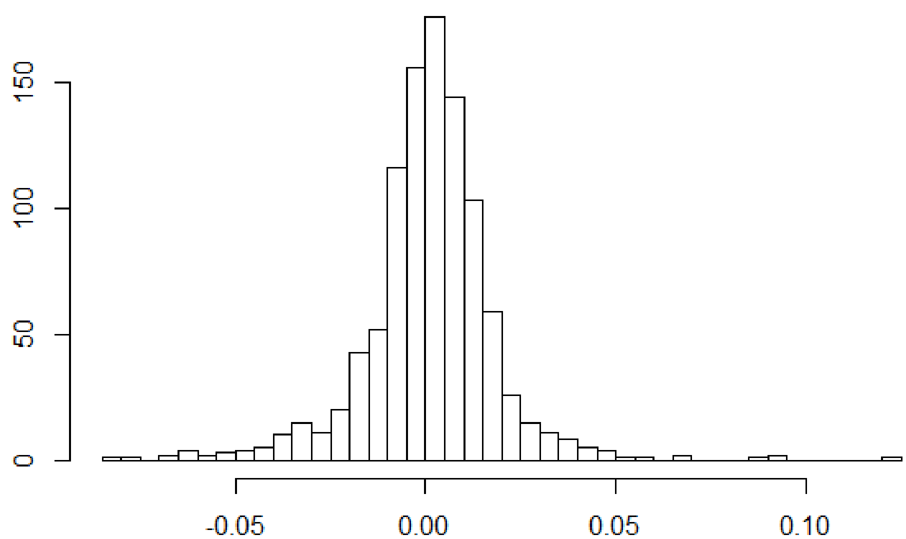
	3m	6m	12m
GARCH	66.68	95.71	137.17
Black-Scholes	67.83	95.89	135.51



Wykres 3.1: Historyczne ceny zamknięcia



Wykres 3.2: Log-zwroty z cen zamknięcia



Wykres 3.3: Histogram log-zwrotów z cen zamknięcia

Bibliografia

[1] Bollerslev, Tim: *"Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity"*, Journal of Econometrics, Vol. 31, 1986, s. 307-327

[2] Duan, Jin-Chuan: *"The GARCH Option Pricing Model"*, Mathematical Finance, Vol. 5, 1995, s. 13-32

[3] Fiszeder, Piotr: *"Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych"*, Toruń 2009

[4] Francq, Christian; Zakoian Jean-Michel: *"GARCH Models. Structure, Statistical Inference and Financial Applications"*, 2010

[5] Jakubowski Jacek: *"Modele matematyczne rynków instrumentów pochodnych I"*, Warszawa 2011

[6] Pliska, Stanley R.: *"Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym"*, Warszawa 2005

[7] McNeil, Alexander J.; Frey, Rudiger; Embrechts, Paul: *"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools"*, Princeton, 2005

[8] Ramirez, Ambrosio O.: *"Valuación de opciones sobre activos financieros con un modelo GARCH-NIG(SC) para la volatilidad"*, Monterrey, 2010

[9] Venter, Rudolf G.: *"Pricing Options under Stochastic Volatility"*, Pretoria, 2003